

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРОГНОЗИРОВАНИЮ НЕЧЕТКИХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ПРИМЕРЕ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ИНДЕКСА ДООУ ДЖОНСА – ЧАСТЬ I

Р.Р. Рзаев<sup>1</sup>, П.Э. Ализаде<sup>2</sup>, Т.З. Мехтиев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт Систем Управления НАНА, Баку, Азербайджан  
<sup>2</sup>Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

e-mail: raminrza@yahoo.com, palizade@inbox.ru, tahir.mehdiyev@gmail.com

**Абстракт.** Рассматривается подход к фаззификации исторических данных, как результатов наблюдений на основе «мягких измерений» состояний динамической системы на определённом промежутке времени. В качестве примера выбран индустриальный индекс Доу-Джонса, показания которого были установлены по результатам ежедневных торгов на фондовой бирже США, в период с 15.06.2018 г. по 10.10.2019 г.

**Ключевые слова:** индекс Доу-Джонса, нечёткий временной ряд, нечёткое множество, функция принадлежности, прогностическая модель

**AMS Subject Classification:** 94D05, 93C42.

### 1. Введение

На протяжении последних двух десятилетий исследованию нечётких временных рядов посвящены многочисленные публикации, среди которых следует отметить работы К. Сонга и Б. Чиссома [20, 21], Н. Кумара и др. [15], С. Чена [4, 5], С.М. Чена и др. [6-10], К. Ченга и др. [11], Дж. Поулсена [18], К. Хуарнга [14], Ю. Хунга и др. [13], В. Услу и др. [22] и пр. Описанные в этих работах подходы к прогнозированию временных рядов отличаются своими правилами фаззификации исторических данных и/или дефаззификации нечётких выходов предлагаемых моделей. Очевидно, что насколько эти правила позволяют адекватно описывать данные временного ряда по средствам нечётких множеств и, соответственно, интерпретировать полученные результаты в традиционной численной манере, зависит достоверность конечных прогнозов. С целью устранения недостатков традиционных методов прогнозирования в [20] впервые предложен метод прогнозирования нечетких временных рядов (НВР) на примере прогнозирования уровня приема в университеты в 1993 году. Первоначальная структура НВР очень сложна и требует много времени и вычислительных ресурсов. Поэтому на смену ей пришла более эффективная модель Чена [4, 5], которая стала общепринятой со стороны исследователей и сейчас является наиболее распространенной для прогнозирования FTS. В [4] был предложен достаточно простой метод вычислений, что позволило повысить точность предсказания на основе моделирования НВР. До сих пор эта модель используется в качестве основы для моделирования НВР.

Фаззификация исторических данных является начальным этапом на пути построения прогностической модели нечёткого временного ряда. Так, в [16, 19] сформулирован авторский подход к фаззификации исторических данных на

примерах волатильных временных рядов. Тем не менее, в работе [16] вопрос относительно оптимального числа качественных критериев оценки исторических данных, описываемых адекватными нечеткими множествами, остался открытым. Поэтому данное исследование было задумано в продолжении статьи [16], некоторые важные фрагменты которой нашли свое отражение в данной работе из соображений описания целостности подхода.

## 2. Постановка задачи

Объектом исследования является временной ряд индустриального индекса Доу-Джонса (DJIA – Dow Jones Industrial Average), охватывающий совокупность исторических данных за период с 15.06.2018 г. по 10.10.2019 г. (см. рис. 1 и/или Табл. 1) [12].

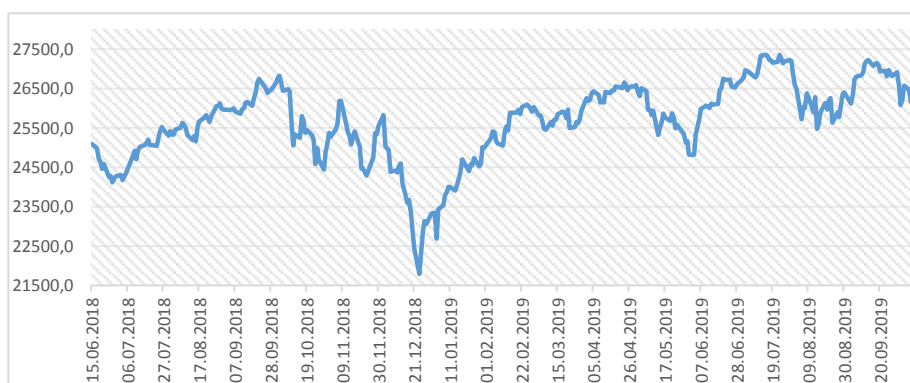


Рис. 1. Волатильный временной ряд индекса DJIA

В виду того, что индекс DJIA устанавливается по результатам ежедневных торгов на фондовой бирже США путём обычного арифметического усреднения составляющих его показателей, каждое значение этого индекса  $x(t)$  на момент времени  $t$  будем считать слабо структурированной исторической данной, которую можно интерпретировать в виде нечёткого множества  $A_j$  ( $j = 1 \div J$ ), характеризуемого картежом [1, 2, 23]:  $\{x(t) / \mu_{A_j}[x(t)]\}, \mu_{A_j}[x(t)] \rightarrow [0, 1]$ . Тогда необходимо разработать метод фаззификации исторических данных показателей индекса DJIA, который позволил бы адекватно восстановить временной ряд в терминах нечётких множеств и, тем самым, повысить достоверность его прогнозирования на основе существующих нечётких моделей.

## 3. Фаззификация исторических данных временного ряда индекса DJIA

Для фаззификации данных временного ряда индекса DJIA в качестве универсума выберем покрытие в виде отрезка  $D=[D_{\min}-D_1, D_{\max}+D_2]$ , где  $D_{\min}$  и  $D_{\max}$  являются минимальным и максимальным значениями индекса DJIA, соответственно;  $D_1>0$  и  $D_2>0$  выбираются из расчёта деления отрезка  $D$  на

равные интервалы  $u_j$  по числу качественных критериев оценки. Предположим, что такими критериями являются 8 термов лингвистической переменной «*Величина индекса ДИА*», которые представляются в виде следующих нечётких подмножеств дискретного универсума  $U=\{u_1, u_2, \dots, u_8\}$ :

- СЛИШКОМ НИЗКАЯ:  $C_1=\mu_{C_1}(u_1)/u_1+\mu_{C_1}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_1}(u_8)/u_8$ ,
- ОЧЕНЬ НИЗКАЯ:  $C_2=\mu_{C_2}(u_1)/u_1+\mu_{C_2}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_2}(u_8)/u_8$ ,
- БОЛЕЕ ЧЕМ НИЗКАЯ:  $C_3=\mu_{C_3}(u_1)/u_1+\mu_{C_3}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_3}(u_8)/u_8$ ,
- НИЗКАЯ:  $C_4=\mu_{C_4}(u_1)/u_1+\mu_{C_4}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_4}(u_8)/u_8$ ,
- ВЫСОКАЯ:  $C_5=\mu_{C_5}(u_1)/u_1+\mu_{C_5}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_5}(u_8)/u_8$ ,
- БОЛЕЕ ЧЕМ ВЫСОКАЯ:  $C_6=\mu_{C_6}(u_1)/u_1+\mu_{C_6}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_6}(u_8)/u_8$ ,
- ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ:  $C_7=\mu_{C_7}(u_1)/u_1+\mu_{C_7}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_7}(u_8)/u_8$ ,
- СЛИШКОМ ВЫСОКАЯ:  $C_8=\mu_{C_8}(u_1)/u_1+\mu_{C_8}(u_2)/u_2+ \dots +\mu_{C_8}(u_8)/u_8$ .

где  $\mu_{C_i}(u_j) \in [0, 1]$  ( $i, j = 1 \div 8$ ) – значения функции принадлежности интервала  $u_j$  к нечёткому множеству  $C_i$ . Другими словами, принадлежность индекса ДИА интервалу  $u_j$  определяется качественным критерием, описываемым нечётким множеством  $C_i$ .

В рассматриваемом временном ряде индекса ДИА, включающим 333 исторических данных, минимальным и максимальным значениями являются, соответственно, числа  $D_{\min}=21792.2$  и  $D_{\max}=27359.2$ . Выбирая  $D_1=21.2$  и  $D_2=11.8$ , получим покрытие в виде отрезка  $U=[21771, 27371]$ , который в соответствие с числом качественных критериев оценки  $C_i$ , разобьём на восемь равные интервалы длиной в 700 единиц:  $u_1=[21771, 22471]$ ,  $u_2=[22471, 23171]$ ,  $u_3=[23171, 23871]$ ,  $u_4=[23871, 24571]$ ,  $u_5=[24571, 25271]$ ,  $u_6=[25271, 25971]$ ,  $u_7=[25971, 26671]$ ,  $u_8=[26671, 27371]$ . В этом случае нечёткую интерпретацию исторической данной осуществим с учётом принадлежности интервала её локализации  $u_j$  ( $j=1 \div 8$ ) тому или иному нечёткому множеству  $C_j$ . Для этого за основу выберем следующие непротиворечивые и достаточно тривиальные высказывания:

- $e_1$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_1$ , то его величина является слишком низкой»;
- $e_2$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_2$ , то его величина является очень низкой»;
- $e_3$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_3$ , то его величина является более чем низкой»;
- $e_4$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_4$ , то его величина является низкой»;
- $e_5$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_5$ , то его величина является высокой»;
- $e_6$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_6$ , то его величина является более чем высокой»;
- $e_7$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_7$ , то его величина является очень высокой»;
- $e_8$ : «Если индекс ДИА расположен ближе к середине отрезка  $u_8$ , то его величина является слишком высокой».

Анализ этих информационных фрагментов позволяет выявить одну входную характеристику в виде лингвистической переменной  $x$ =«*Локализация исторической данной*», значениями которой являются термы «БЛИЖЕ К СЕРЕДИНЕ ОТРЕЗКА  $u_k$ » ( $k=1 \div 8$ ), и одну выходную лингвистическую переменную  $y$ =«*Величина индекса ДИА*», принимающую значения в виде термов: СЛИШКОМ НИЗКАЯ, ОЧЕНЬ НИЗКАЯ,

БОЛЕЕ ЧЕМ НИЗКАЯ, НИЗКАЯ, ВЫСОКАЯ, БОЛЕЕ ЧЕМ ВЫСОКАЯ, ОЧЕНЬ ВЫСОКАЯ, СЛИШКОМ ВЫСОКАЯ.

Вербальную оценку локализации исторической данной  $x(t)$  по признаку принадлежности тому или иному отрезку  $u_j$  ( $j=1\div 8$ ) отразим в виде нечёткого подмножества универсума, состоящего из полного набора значений индекса ДЖА:  $U = \{x(t)\}_{t=1}^{333}$ . В качестве функции принадлежности выберем функцию Гауссовского типа

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x_i - u_{j0})^2}{\sigma^2}}, \quad (1)$$

где  $x_i = x(t)$  – историческая данная индекса ДЖА, полученная по результатам завершения торгов на фондовой бирже за  $t$ -ый день;  $u_{j0}$  – середина интервала  $u_j$  ( $j=1\div 8$ );  $\sigma^2$  – плотность (дисперсия), выбранная единой для всех случаев, как 2500000 (см. Рис. 2).

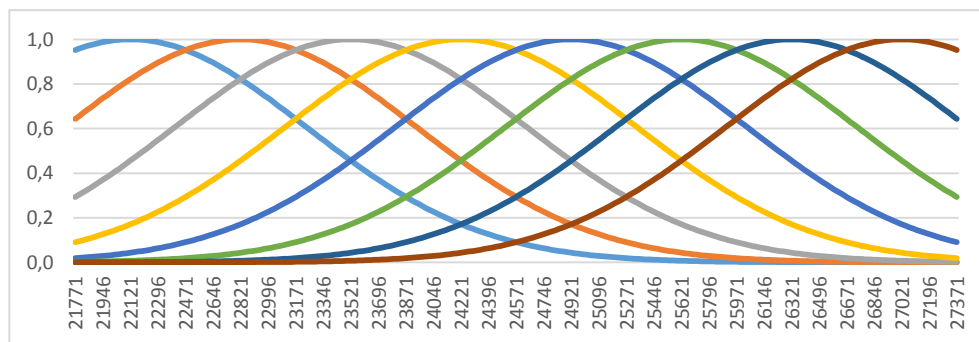


Рис. 2. Гауссовские функции принадлежности нечётких множеств, отражающих степень локализации исторических данных

Замечая, что серединами отрезков  $u_j$  являются соответствующие числа:  $u_{10}=22121$ ,  $u_{20}=22821$ ,  $u_{30}=23521$ ,  $u_{40}=24221$ ,  $u_{50}=24921$ ,  $u_{60}=25621$ ,  $u_{70}=26321$ ,  $u_{80}=27021$ , согласно (1) признаки локализации исторических данных  $x(t)$  интерпретируется как:

- «БЛИЗКО К 22121» как нечёткое множество:  
 $X_1=0.952181/x_1+0.958630/x_2+0.964640/x_3+\dots+0.000793/x_{332}+0.000472/x_{333}$ ;
- «БЛИЗКО К 22821» как нечёткое множество:  
 $X_2=0.643393/x_1+0.656883/x_2+0.670320/x_3+\dots+0.006941/x_{332}+0.004497/x_{333}$ ;
- «БЛИЗКО К 23521» как нечёткое множество:  
 $X_3=0.293758/x_1+0.304145/x_2+0.314743/x_3+\dots+0.041079/x_{332}+0.028958/x_{333}$ ;
- «БЛИЗКО К 24221» как нечёткое множество:  
 $X_4=0.090627/x_1+0.095155/x_2+0.099859/x_3+\dots+0.164269/x_{332}+0.125994/x_{333}$ ;
- «БЛИЗКО К 24921» как нечёткое множество:  
 $X_5=0.018892/x_1+0.020116/x_2+0.021408/x_3+\dots+0.443858/x_{332}+0.370415/x_{333}$ ;
- «БЛИЗКО К 25621» как нечёткое множество:  
 $X_6=0.002661/x_1+0.002873/x_2+0.003101/x_3+\dots+0.810382/x_{332}+0.735842/x_{333}$ ;
- «БЛИЗКО К 26321» как нечёткое множество:  
 $X_7=0.000253/x_1+0.000277/x_2+0.000304/x_3+\dots+0.999750/x_{332}+0.987728/x_{333}$ ;

- «БЛИЗКО К 27021» как нечёткое множество:

$$X_8=0.000016/x_1+0.000018/x_2+0.000020/x_3+\dots+0.833393/x_{332}+0.895873/x_{333}.$$

Термы выходной лингвистической переменной «Величина индекса ДЖА» опишем в виде нечётких подмножеств дискретного универсума  $I = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$ . Так,  $\forall i \in I$  имеем [3, 23]:

- $TL$ =СЛИШКОМ НИЗКОЕ,  $\mu_{TL}(i) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ 1, & i < 1; \end{cases}$
- $VL$ =ОЧЕНЬ НИЗКОЕ:  $\mu_{VL}(i) = (1-i)^2$ ;
- $ML$ =БОЛЕЕ ЧЕМ НИЗКОЕ:  $\mu_{ML}(i) = \sqrt{1-i}$ ;
- $L$ =НИЗКОЕ:  $\mu_L(i)=1-i$ ;
- $H$ =ВЫСОКОЕ:  $\mu_H(i)=i$ ;
- $MH$ =БОЛЕЕ ЧЕМ ВЫСОКОЕ:  $\mu_{MH}(i) = \sqrt{i}$ ;
- $VH$ =ОЧЕНЬ ВЫСОКОЕ:  $\mu_{VH}(i)=i^2$ ;
- $TH$ =СЛИШКОМ ВЫСОКОЕ,  $\mu_{TH}(i) = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i < 1. \end{cases}$

С учётом введённых формализмов приведённые выше рассуждения трансформируются в систему нечеткого вывода [1, 3, 23], которая в символьной форме выглядит как следующее:

- $e_1: (x = X_1) \Rightarrow (y = TL)$ ;
- $e_2: (x = X_2) \Rightarrow (y = VL)$ ;
- $e_3: (x = X_3) \Rightarrow (y = ML)$ ;
- $e_4: (x = X_4) \Rightarrow (y = L)$ ;
- $e_5: (x = X_5) \Rightarrow (y = H)$ ;
- $e_6: (x = X_6) \Rightarrow (y = MH)$ ;
- $e_7: (x = X_7) \Rightarrow (y = VH)$ ;
- $e_8: (x = X_8) \Rightarrow (y = TH)$ .

После преобразования этих правил с применением, например, нечеткой импликации Лукасевича:  $\mu_w(u, i) = \min\{1, 1 - \mu_X(u) + \mu_Y(i)\}$ , для каждой пары  $(u, i) \in X \times Y$  на  $X \times Y$  формируются нечёткие отношения в виде следующих матриц:

$$R_1 = \begin{bmatrix} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0294 & 1.0000 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 & 0.9706 \\ 0.0374 & 1.0000 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 & 0.9626 \\ 0.0699 & 1.0000 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 & 0.9301 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0008 & 1.0000 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 & 0.9992 \\ 0.0005 & 1.0000 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 & 0.9995 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} & 1 & 0.81 & 0.64 & 0.49 & 0.36 & 0.25 & 0.16 & 0.09 & 0.04 & 0.01 & 0 \\ 0.1274 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9626 & 0.9126 & 0.8826 & 0.8726 \\ 0.1530 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9370 & 0.8870 & 0.8570 & 0.8470 \\ 0.2435 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9165 & 0.8465 & 0.7965 & 0.7665 & 0.7565 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0069 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9931 \\ 0.0045 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9955 \end{bmatrix},$$

**Р.Р. РЗАЕВ, П.Э. АЛИЗАДЕ, Т.З. МЕХТИЕВ ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ...**

$$R_3 = \begin{bmatrix} & 1 & 0.9487 & 0.8944 & 0.8367 & 0.7746 & 0.7071 & 0.6325 & 0.5477 & 0.4472 & 0.3162 & 0 \\ 0.3733 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9429 & 0.6267 \\ 0.4231 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.8932 & 0.5769 \\ 0.5734 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9743 & 0.8738 & 0.7428 & 0.4266 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0008 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9589 \\ 0.0005 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9710 \end{bmatrix},$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} & 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.7390 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9610 & 0.8610 & 0.7610 & 0.6610 & 0.5610 & 0.4610 & 0.3610 & 0.2610 \\ 0.7906 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9094 & 0.8094 & 0.7094 & 0.6094 & 0.5094 & 0.4094 & 0.3094 & 0.2094 \\ 0.9122 & 1.0000 & 0.9878 & 0.8878 & 0.7878 & 0.6878 & 0.5878 & 0.4878 & 0.3878 & 0.2878 & 0.1878 & 0.0878 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.1643 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9357 & 0.8357 \\ 0.1260 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 0.9740 & 0.8740 \end{bmatrix},$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ 0.9886 & 0.0114 & 0.1114 & 0.2114 & 0.3114 & 0.4114 & 0.5114 & 0.6114 & 0.7114 & 0.8114 & 0.9114 & 1.0000 \\ 0.9982 & 0.0018 & 0.1018 & 0.2018 & 0.3018 & 0.4018 & 0.5018 & 0.6018 & 0.7018 & 0.8018 & 0.9018 & 1.0000 \\ 0.9807 & 0.0193 & 0.1193 & 0.2193 & 0.3193 & 0.4193 & 0.5193 & 0.6193 & 0.7193 & 0.8193 & 0.9193 & 1.0000 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.4439 & 0.5561 & 0.6561 & 0.7561 & 0.8561 & 0.9561 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.3704 & 0.6296 & 0.7296 & 0.8296 & 0.9296 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$R_6 = \begin{bmatrix} & 0 & 0.3162 & 0.4472 & 0.5477 & 0.6325 & 0.7071 & 0.7746 & 0.8367 & 0.8944 & 0.9487 & 1 \\ 0.8935 & 0.1065 & 0.4227 & 0.5337 & 0.6542 & 0.7389 & 0.8136 & 0.8811 & 0.9431 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.8517 & 0.1483 & 0.4645 & 0.5955 & 0.6960 & 0.7808 & 0.8554 & 0.9229 & 0.9850 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.7124 & 0.2876 & 0.6039 & 0.7348 & 0.8353 & 0.9201 & 0.9947 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.8104 & 0.1896 & 0.5058 & 0.6368 & 0.7373 & 0.8221 & 0.8967 & 0.9642 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.7358 & 0.2642 & 0.5804 & 0.7114 & 0.8119 & 0.8966 & 0.9713 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$R_7 = \begin{bmatrix} & 0 & 0.01 & 0.04 & 0.09 & 0.16 & 0.25 & 0.36 & 0.49 & 0.64 & 0.81 & 1 \\ 0.5457 & 0.4543 & 0.4643 & 0.4943 & 0.5443 & 0.6143 & 0.7043 & 0.8143 & 0.9443 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.4910 & 0.5090 & 0.5190 & 0.5490 & 0.5990 & 0.6690 & 0.7590 & 0.8690 & 0.9990 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.3497 & 0.6503 & 0.6603 & 0.6903 & 0.7403 & 0.8103 & 0.9003 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.9998 & 0.0002 & 0.0102 & 0.0402 & 0.0902 & 0.1602 & 0.2502 & 0.3602 & 0.4902 & 0.6402 & 0.8102 & 1.0000 \\ 0.9877 & 0.0123 & 0.0223 & 0.0523 & 0.1023 & 0.1723 & 0.2623 & 0.3723 & 0.5023 & 0.6523 & 0.8223 & 1.0000 \end{bmatrix},$$

$$R_8 = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2252 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 0.7748 & 1.0000 \\ 0.1913 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 0.8087 & 1.0000 \\ 0.1160 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 0.8840 & 1.0000 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.8334 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 1.0000 \\ 0.8959 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 1.0000 \end{bmatrix}.$$

В результате пересечения нечётких отношений  $R_1, R_2, \dots, R_8$  было получено общее функциональное решение в виде следующей матрицы

$$R = \begin{bmatrix} & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ x_1 = 25090.5 & 0.0114 & 0.1114 & 0.2114 & 0.3114 & 0.4114 & 0.5114 & 0.6114 & 0.5610 & 0.4610 & 0.3610 & 0.2610 \\ x_2 = 24987.5 & 0.0018 & 0.1018 & 0.2018 & 0.3018 & 0.4018 & 0.5018 & 0.6018 & 0.5094 & 0.4094 & 0.3094 & 0.2094 \\ x_3 = 24700.2 & 0.0193 & 0.1193 & 0.2193 & 0.3193 & 0.4193 & 0.5193 & 0.4878 & 0.3878 & 0.2878 & 0.1878 & 0.0878 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{332} = 26346.0 & 0.0002 & 0.0102 & 0.0402 & 0.0902 & 0.1602 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.8357 \\ x_{333} = 26496.7 & 0.0123 & 0.0223 & 0.0523 & 0.1023 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.1041 & 0.8740 \end{bmatrix},$$

которая отражает причинно-следственную связь между признаками локализации исторических данных  $x_i$ , с одной стороны, и, собственно, оценкой величины индекса ДЛИА, с другой. В данном случае нечёткая интерпретация  $t$ -ой исторической данной  $A_t$  ( $t=1\div 333$ ) находится посредством правила композиционного вывода:  $A_t = G_t \circ R$  ( $t = 1\div 333$ ), где  $G_t$  является отображением  $t$ -ой исторической данной в виде нечёткого подмножества универсума  $U$ . Выбирая композиционное правило в виде [1, 2, 23]

$$\mu_{A_t}(i) = \max_{x \in U} \{ \min(\mu_{G_t}(x), \mu_R(x)) \},$$

и, полагая

$$\mu_{G_t}(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_t; \\ 1, & x = x_t, \end{cases}$$

в итоге имеем:

$$\mu_{A_t}(i) = \mu_R(x_t, i).$$

Последнее означает, что нечеткое множество  $A_t$  отражает  $t$ -й индекс ДЛИА на дискретном универсуме  $I$ , соответствующие значения функции принадлежности которого расположены на  $t$ -ой строке матрицы  $R$ . В частности, нечётким аналогом исторической данной  $x_1=25090.5$  является нечёткое множество (1-я строка матрицы  $R$ ):

$$A_1 = \{0.0114/0, 0.1114/0.1, 0.2114/0.2, 0.3114/0.3, 0.4114/0.4, 0.5114/0.5, 0.6114/0.6, 0.5610/0.7, 0.4610/0.8, 0.3610/0.9, 0.2610/1\}.$$

Таким образом, согласно принятому подходу, все исторические данные временного ряда индекса ДЛИА могут быть отражены в виде соответствующих нечётких множеств, детализированное представления которых сведены в Таблицу 1.

В последнем столбце таблицы 1 представлены точечные оценки нечетких множеств (ТО НМ) или, что тоже самое, дефазсифицированные значения соответствующих НМ  $A_t$  ( $t=1\div 333$ ), которые, как показано на рис. 3, условно восстанавливают конфигурацию временного ряда индекса ДЛИА в масштабе отрезка  $[0, 1]$ .

Таблица 1. Детализированный нечёткий аналог временного ряда индекса DJIA

Дата	HM	Значения функции принадлежности нечёткого подмножества универсума $I$								ГО HM
		0	0.1	0.2	0.3	...	0.8	0.9	1	
15.06.2018	A <sub>1</sub>	0.0114	0.1114	0.2114	0.3114	...	0.4610	0.3610	0.2610	0.6062
18.06.2018	A <sub>2</sub>	0.0018	0.1018	0.2018	0.3018	...	0.4094	0.3094	0.2094	0.5939
19.06.2018	A <sub>3</sub>	0.0193	0.1193	0.2193	0.3193	...	0.2878	0.1878	0.0878	0.5330
20.06.2018	A <sub>4</sub>	0.0273	0.1273	0.2273	0.3273	...	0.2735	0.1735	0.0735	0.5219
21.06.2018	A <sub>5</sub>	0.0809	0.1809	0.2809	0.3809	...	0.2229	0.1229	0.0229	0.4723
22.06.2018	A <sub>6</sub>	0.0452	0.1452	0.2452	0.3452	...	0.2505	0.1505	0.0505	0.5024
25.06.2018	A <sub>7</sub>	0.1636	0.2636	0.3636	0.4636	...	0.2004	0.1004	0.0004	0.4220
26.06.2018	A <sub>8</sub>	0.1502	0.2502	0.3502	0.4502	...	0.2015	0.1015	0.0015	0.4280
27.06.2018	A <sub>9</sub>	0.2275	0.3275	0.4275	0.5275	...	0.2043	0.1043	0.0043	0.4013
28.06.2018	A <sub>10</sub>	0.1802	0.2802	0.3802	0.4802	...	0.2000	0.1000	0.0000	0.4154
.....										
01.11.2018	A <sub>98</sub>	0.0228	0.1811	0.2811	0.3811	...	0.6161	0.5161	0.4161	0.6255
02.11.2018	A <sub>99</sub>	0.0478	0.1478	0.2478	0.3478	...	0.5565	0.4565	0.3565	0.6189
05.11.2018	A <sub>100</sub>	0.0101	0.2104	0.2957	0.3457	...	0.6219	0.5598	0.4598	0.6391
06.11.2018	A <sub>101</sub>	0.0001	0.1816	0.2116	0.2616	...	0.5362	0.5362	0.5506	0.6778
07.11.2018	A <sub>102</sub>	0.0079	0.0179	0.0479	0.0979	...	0.2463	0.2463	0.7847	0.8999
08.11.2018	A <sub>103</sub>	0.0067	0.0167	0.0467	0.0967	...	0.2408	0.2408	0.7883	0.9025
09.11.2018	A <sub>104</sub>	0.0431	0.0531	0.0831	0.1331	...	0.3467	0.3467	0.7137	0.8462
12.11.2018	A <sub>105</sub>	0.0216	0.1833	0.2833	0.3833	...	0.6196	0.5196	0.4196	0.6264
13.11.2018	A <sub>106</sub>	0.0438	0.1520	0.2520	0.3520	...	0.5650	0.4650	0.3650	0.6202
14.11.2018	A <sub>107</sub>	0.0101	0.1101	0.2101	0.3101	...	0.4558	0.3558	0.2558	0.6051
.....										
27.09.2019	A <sub>324</sub>	0.0160	0.0160	0.0160	0.0160	...	0.0160	0.0160	0.9330	0.9914
30.09.2019	A <sub>325</sub>	0.0043	0.0043	0.0043	0.0043	...	0.0043	0.0043	0.9454	0.9977
01.10.2019	A <sub>326</sub>	0.0251	0.0351	0.0651	0.0771	...	0.0771	0.0771	0.8906	0.9627
02.10.2019	A <sub>327</sub>	0.0232	0.0332	0.0632	0.1132	...	0.2990	0.2990	0.7485	0.8741
03.10.2019	A <sub>328</sub>	0.0057	0.0157	0.0457	0.0957	...	0.2358	0.2358	0.7916	0.9048
04.10.2019	A <sub>329</sub>	0.0252	0.0352	0.0652	0.0769	...	0.0769	0.0769	0.8907	0.9627
07.10.2019	A <sub>330</sub>	0.0098	0.0198	0.0498	0.0998	...	0.1113	0.1113	0.8697	0.9513
08.10.2019	A <sub>331</sub>	0.0098	0.0198	0.0498	0.0998	...	0.2546	0.2546	0.7791	0.8959
09.10.2019	A <sub>332</sub>	0.0002	0.0102	0.0402	0.0902	...	0.1666	0.1666	0.8357	0.9321
10.10.2019	A <sub>333</sub>	0.0123	0.0223	0.0523	0.1023	...	0.1041	0.1041	0.8740	0.9534

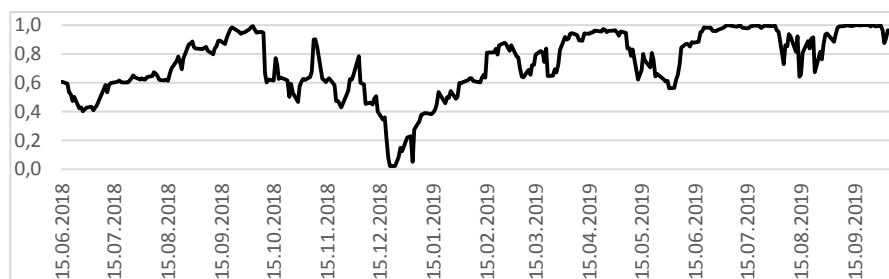


Рис. 3. Временной ряд индекса DJIA в нотации точечных оценок нечётких множеств



ТО НМ устанавливаются согласно следующим рассуждениям. Для нечёткого подмножества универсального дискретного множества, т.е. в нашем случае для  $A \subset I$  определяются  $\alpha$ -уровневые множества ( $\alpha \in [0, 1]$ ):  $A_\alpha = \{i/\mu_A(i) \geq \alpha, i \in I\}$ . Далее, для каждого множества  $A_\alpha$  вычисляется соответствующая мощность  $M(A_\alpha)$  – среднее число элементов, по формуле:

$$M(A_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k, \quad u_k \in A_\alpha. \quad (2)$$

В итоге, ТО для нечёткого множества  $A$  устанавливается по формуле:

$$F(A) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(A_\alpha) d\alpha. \quad (3)$$

где  $\alpha_{\max}$  – максимальное значение функции принадлежности нечеткого множеств  $A$ .

Так, применяя (2), для нечёткого аналога  $A_1$  индекса DJIA  $x_1$  имеем:

- для  $0 < \alpha < 0.0114$ ,  $\Delta\alpha = 0.0114$ ,  $A_{1\alpha} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.50$ ;
- для  $0.0114 < \alpha < 0.1114$ ,  $\Delta\alpha = 0.1$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.55$ ;
- для  $0.1114 < \alpha < 0.2114$ ,  $\Delta\alpha = 0.1$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.60$ ;
- для  $0.2114 < \alpha < 0.2610$ ,  $\Delta\alpha = 0.0495$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.65$ ;
- для  $0.2610 < \alpha < 0.3114$ ,  $\Delta\alpha = 0.0505$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.60$ ;
- для  $0.3114 < \alpha < 0.3610$ ,  $\Delta\alpha = 0.0495$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.65$ ;
- для  $0.3610 < \alpha < 0.4114$ ,  $\Delta\alpha = 0.0505$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.60$ ;
- для  $0.4114 < \alpha < 0.4610$ ,  $\Delta\alpha = 0.0495$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.65$ ;
- для  $0.4610 < \alpha < 0.5114$ ,  $\Delta\alpha = 0.0505$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.5, 0.6, 0.7\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.60$ ;
- для  $0.5114 < \alpha < 0.5610$ ,  $\Delta\alpha = 0.0495$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.6, 0.7\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.65$ ;
- для  $0.5610 < \alpha < 0.6114$ ,  $\Delta\alpha = 0.0505$ ,  $A_{1\alpha} = \{0.6\}$ ,  $M(A_{1\alpha}) = 0.60$ .

Тогда, согласно формуле (3) ТО нечеткого множества  $A_1$  будет следующее число:

$$E(A_1) = [0.0114 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.55 + 0.1 \cdot 0.60 + 0.0495 \cdot 0.65 + 0.0505 \cdot 0.60 + 0.0495 \cdot 0.65 + 0.0505 \cdot 0.60 + 0.0495 \cdot 0.65 + 0.0505 \cdot 0.60 + 0.0495 \cdot 0.65 + 0.0505 \cdot 0.60] / 0.6114 = 0.6062.$$

Представленные в таблице 1 нечеткие множества формируют по числу исторических данных избыточный набор, чтобы на его основе можно было бы применять известные нечёткие прогностические модели временного ряда. Следует установить в определенном смысле оптимальное число нечетких множеств. Для этого воспользуемся пошаговой процедурой, предложенной в [17].

**Шаг 1.** Сортировка исторических данных  $x_t$  ( $t = 1 \div 333$ ) индекса DJIA в возрастающую последовательность  $\{x_{p(i)}\}$ , где  $p$  – перестановка, которая сортирует значения индекса DJIA в порядке их возрастания, т.е.  $x_{p(i)} \leq x_{p(i+1)}$ .

Шаг 2. Вычисление средней величины по совокупности всех попарных расстояний  $d_i = |x_{p(i)} - x_{p(i+1)}|$  между любыми двумя последовательными значениями  $x_{p(i)}$  и  $x_{p(i+1)}$  по формуле:

$$AD = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |x_{p(i)} - x_{p(i+1)}|, \quad (4)$$

и стандартного отклонения по формуле

$$\sigma_{AD} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (d_i - AD)^2}. \quad (5)$$

Шаг 3. Устранение аномалий – резко выделяющихся величин, подлежащих сбросу. Выбросу подлежат величины попарных расстояний, которое не удовлетворяют условию:

$$AD - \sigma_{AD} \leq d_i \leq AD + \sigma_{AD}. \quad (6)$$

Шаг 4. Повторное вычисление  $AD$  на совокупности попарных расстояний, оставшихся после их сортировки с учётом сбросов, и вычисление в определенном смысле оптимального числа  $m$  контекстных нечетких множеств по формуле

$$m = \frac{D_2 - D_1 - AD}{2 \cdot AD}, \quad (7)$$

где  $D_1 = D_{\min} - AD$ ,  $D_2 = D_{\max} + AD$ .

Руководствуясь формулами (4) и (5), для временного ряда индекса ДЖА ( $n = 333$ ) соответственно имеем:  $AD = 16.7681$  и  $\sigma_{AD} = 43.8484$ . Отбрасывая  $d_i$ , не удовлетворяющие условию

$$-27.0803 \approx 16.7681 - 43.8484 \leq d_i \leq 16.7681 + 43.8484 \approx 60.6165,$$

получим окончательное значение средней величины по совокупности оставшихся попарных расстояний  $d_i$ :  $AD = 9.9740$ . Тогда, выбирая в качестве универсального множества отрезок (см. [14])

$$D = [D_{\min} - AD, D_{\max} + AD] = [D_1, D_2],$$

где  $D_1 = 21792.2 - 9.9740 = 21782.2260$ ,  $D_2 = 27359.2 + 9.9740 = 27369.1740$ , по формуле (7) устанавливается общее число НМ

$$m = \frac{27369.1740 - 21782.2260 - 9.9740}{2 \cdot 9.9740} = 279.5765 \approx 280,$$

отражающих качественные критерии оценки исторических данных индекса ДЖА.

Далее, полагая  $F_1$  ТО НМ  $A_1$  и  $F_{333}$  ТО НМ  $A_{333}$ , разобьём отрезок  $[F_1, F_{333}]$  на 280 равных отрезков  $a_k$  ( $k=1 \div 280$ ) с длиной  $(F_{333} - F_1)/280$ . Тогда нечеткие множества  $A_t$  ( $t=1 \div 333$ ) (см. Таблицу 1) распределим по соответствующим группам путём применения правила: «Если ТО НМ  $A_t$  из отрезка  $a_k$  ( $k=1 \div 280$ ), то  $A_t$  из  $k$ -ой группы».

В результате такого распределения получены 144 группы<sup>1</sup>, в рамках которых сформированы качественные критерии оценки показателей индексов ДЛИА, которые сведены в Таблицу 2.

Таблица 2. Качественные критерии оценки индекса ДЛИА

Критерий оценки	Значения функции принадлежности нечеткого подмножества универсума $I$								
	0	0.1	0.2	0.3	...	0.7	0.8	0.9	1
$C_1$	0.9138	0.0412	0.0412	0.0412	...	0.0412	0.0412	0.0412	0.0412
$C_2$	0.8644	0.1200	0.1200	0.1200	...	0.0972	0.0472	0.0172	0.0072
$C_3$	0.8173	0.1960	0.1960	0.1960	...	0.0906	0.0406	0.0106	0.0006
$C_4$	0.8115	0.2051	0.2051	0.2051	...	0.0913	0.0413	0.0113	0.0013
$C_5$	0.7489	0.2985	0.2985	0.2985	...	0.1130	0.0630	0.0330	0.0230
$C_6$	0.7193	0.3392	0.3392	0.3392	...	0.1296	0.0796	0.0496	0.0396
$C_7$	0.6396	0.4393	0.4393	0.4393	...	0.1861	0.1361	0.1061	0.0155
$C_8$	0.6379	0.4414	0.4414	0.4414	...	0.1875	0.1375	0.1075	0.0149
$C_9$	0.6292	0.4514	0.4514	0.4514	...	0.1945	0.1445	0.1145	0.0121
$C_{10}$	0.5875	0.4978	0.4978	0.4978	...	0.2292	0.1792	0.1492	0.0031
$C_{135}$	0.0291	0.0391	0.0684	0.0684	...	0.0684	0.0684	0.0684	0.8946
$C_{136}$	0.0369	0.0469	0.0532	0.0532	...	0.0532	0.0532	0.0532	0.9014
$C_{137}$	0.0440	0.0516	0.0516	0.0516	...	0.0516	0.0516	0.0516	0.9067
$C_{138}$	0.0422	0.0422	0.0422	0.0422	...	0.0422	0.0422	0.0422	0.9800
$C_{139}$	0.0337	0.0337	0.0337	0.0337	...	0.0337	0.0337	0.0337	0.9173
$C_{140}$	0.0283	0.0283	0.0283	0.0283	...	0.0283	0.0283	0.0283	0.9215
$C_{141}$	0.0117	0.0217	0.0217	0.0217	...	0.0217	0.0217	0.0217	0.8730
$C_{142}$	0.0147	0.0147	0.0147	0.0147	...	0.0147	0.0147	0.0147	0.9297
$C_{143}$	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	...	0.0091	0.0091	0.0091	0.9351
$C_{144}$	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	...	0.0010	0.0010	0.0010	0.9423

В случае, если группа включает только одно нечеткое множество, то именно оно формирует критерий оценки. В тех случаях, когда группа включает два и более нечетких множеств, критерий оценки формируется в виде их пересечения с применением операции «min» над соответствующими значениями функций принадлежности. Например, в состав 1-ой группы входят нечёткие множества  $A_{132}$  и  $A_{133}$ , чьи ТО располагаются в интервале  $[0.0216, 0.0251]$  (см. Таблицу 1). Сведения об этих множествах на универсуме  $I$ , включая значения их функций принадлежности и ТО, рассчитанные по формулам (2) – (3), а также относительно нечёткого множества  $C_1=A_{132} \cap A_{133}$ , как 1-го критерия оценки индекса ДЛИА, сведены в Таблицу 3.

Таблица 3. Формирование критерия  $C_1$  для оценки индекса ДЛИА

HM	Значения функций принадлежности нечётких множеств из 1-ой группы на универсуме $I$								ТО HM
	0	0.1	0.2	0.3	0.8	0.9	1		
$A_{132}$	0.9138	0.0412	0.0412	0.0412		0.0412	0.0412	0.0412	0.0226
$A_{133}$	0.9801	0.0423	0.0423	0.0423		0.0423	0.0423	0.0423	0.0216
$C_1$	0.9138	0.0412	0.0412	0.0412		0.0412	0.0412	0.0412	0.0226

<sup>1</sup> Остальные 136 группы являются пустыми, т.е. не включают ТО нечетких множеств из списка  $A_t (t=1 \div 333)$

В качестве другого примера выбрана группа нечетких множеств, ТО которых располагаются в последнем 144-ом интервале [0.9960, 0.9995] (см. Таблицу 1). Здесь критерий для оценки индекса ДИА формируется в виде пересечения (см. Таблицу 4):

$$C_{144} = A_{264} \cap A_{265} \cap A_{269} \cap A_{275} \cap A_{279} \cap A_{311} \cap A_{312} \cap A_{315} \cap A_{316} \cap A_{317} \cap A_{318} \cap A_{319} \cap A_{320} \cap A_{322} \cap A_{323} \cap A_{325}.$$

Таблица 4. Формирование критерия  $C_{144}$  для оценки индекса ДИА

НМ	Значения функций принадлежности нечётких множеств из 144-ой группы на универсуме $I$								ТО НМ
	0	0.1	0.2	0.3	...	0.8	0.9	1	
$A_{264}$	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012	...	0.0012	0.0012	0.9509	0.9994
$A_{265}$	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039	...	0.0039	0.0039	0.9460	0.9979
$A_{269}$	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	...	0.0018	0.0018	0.9627	0.9991
$A_{275}$	0.0071	0.0071	0.0071	0.0071	...	0.0071	0.0071	0.9680	0.9963
$A_{279}$	0.0057	0.0057	0.0057	0.0057	...	0.0057	0.0057	0.9670	0.9970
$A_{311}$	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	...	0.0050	0.0050	0.9445	0.9974
$A_{312}$	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	...	0.0054	0.0054	0.9667	0.9972
$A_{315}$	0.0012	0.0012	0.0012	0.0012	...	0.0012	0.0012	0.9617	0.9994
$A_{316}$	0.0032	0.0032	0.0032	0.0032	...	0.0032	0.0032	0.9646	0.9983
$A_{317}$	0.0063	0.0063	0.0063	0.0063	...	0.0063	0.0063	0.9674	0.9967
$A_{318}$	0.0022	0.0022	0.0022	0.0022	...	0.0022	0.0022	0.9632	0.9989
$A_{319}$	0.0029	0.0029	0.0029	0.0029	...	0.0029	0.0029	0.9475	0.9984
$A_{320}$	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020	...	0.0020	0.0020	0.9492	0.9989
$A_{322}$	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	...	0.0010	0.0010	0.9514	0.9995
$A_{323}$	0.0067	0.0067	0.0067	0.0067	...	0.0067	0.0067	0.9423	0.9964
$A_{325}$	0.0043	0.0043	0.0043	0.0043	...	0.0043	0.0043	0.9454	0.9977
$C_{144}$	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	...	0.0010	0.0010	0.9423	0.9995

#### 4. Заключение

На примере волатильного временного ряда индекса ДИА предложен новый метод фаззификации исторических данных, основанный на применении системы нечеткого вывода. Из-за избыточности нечетких интерпретаций слабо структурированных данных, составленных по числу показателей индекса ДИА, произведена кластеризация нечетких множеств и сформирован «оптимальный» набор соответствующих критериев оценки. Применение данного подхода к фаззификации исторических данных позволяет воссоздать нечёткий аналог временного ряда и на его основе в будущем применять ту или иную прогностическую модель.

#### Литература

1. Aliev F.A., Niftiyev A.A., Zeynalov C.I. Optimal synthesis problem for the fuzzy systems, Optimal Control Applications and Methods, 2010, 8 p.
2. Aliev F.A., Niftiyev A.A., Zeynalov J.I. Optimal synthesis problem for the fuzzy systems in semi-infinite interval, Appl. Comput. Math 2011, V.10, N 1, pp. 97-105.

3. Aliev F.A., Shafizadeh E.R., Aliev R.M., Hajiev N.O., Galandarova U.M., Fuzzy model and algorithm for solving of e-shop income maximization, *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics* , 2011, V.10, N 1, pp. 39-46.
4. Chen S.M. and Chung N.Y. Forecasting enrollments of students by using fuzzy time series and genetic algorithms, *International Journal of Information and Management Sciences*, V.17, N3, 2006, pp. 1-17.
5. Chen S.M. and Chung N.Y. Forecasting enrollments using high order fuzzy time series and genetic algorithms, *International Journal of Information and Management Sciences*, V21, 2006, pp. 485-501.
6. Chen S.M. and Hwang J.R. Temperature prediction using fuzzy time series, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, V.30, N2, 2000, pp. 263-275.
7. Chen S.M. and Kao P.Y. TAIEX forecasting based on fuzzy time series, particle swarm optimization techniques and support vector machines, *Information Sciences*, V.247, 2013, pp. 62-71.
8. Chen S.M. and Wang N.Y. Fuzzy forecasting based on fuzzy-trend logical relationship groups, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, V.40, N5, 2010, pp. 1343-1358.
9. Chen S.M. Forecasting enrollments based on fuzzy time series, *Fuzzy Sets and Systems*, V. 81, 1996, pp. 311-319.
10. Chen S.M. Forecasting enrollments based on high-order fuzzy time series, *Cybernetics and Systems*, V.33, N1, 2002, pp. 1-16.
11. Cheng C.H., Chang J.R., Yen C.A. Entropy-based and trapezoid fuzzification fuzzy time series approaches for forecasting IT project cost, *Technological Forecasting & Social Change*, V.73, 2006, pp. 524-542.
12. Dow Jones Industrial Index, <https://www.ru.tradingview.com/symbols/DJ-DJI/>, last accessed 2022/11/15.
13. Huang Y.L., Horng S.J., He M., Fan P., Kao T.W., Khan M.K. and Kuo I.H. A hybrid forecasting model for enrollments based on aggregated fuzzy time series and particle swarm optimization, *Expert Systems with Applications*, V.38, N.7, 2011, pp. 8014-8023.
14. Huarng K. Heuristic models of fuzzy time series for forecasting, *Fuzzy sets and systems*, V.123, N3, 2001, pp. 369-386.
15. Kumar N. et al.: Fuzzy time series forecasting of wheat production. *International Journal on Computer Science and Engineering*, V.2, N3, 2010, pp. 635-640.
16. Mardanov M.J., Rzayev R.R., Alizada P.E. About one approach to data fuzzification on the example of the Dow Jones index time series, *Mathematical Machines and Systems*, V.1, 2021, pp. 108-115.
17. Ortiz-Arroyo D., Poulsen J.R. A weighted fuzzy time series forecasting model, *Indian Journal of Science and Technology*, V.11, N27, 2018, pp. 1-11.

18. Poulsen J.R. Fuzzy time series forecasting – developing a new forecasting model based on high order fuzzy time series. – AAUE: CIS 4, 2009. – 67 p.
19. Rzayev R.R. et al. Modelirovaniye vremennykh ryadov na osnove nechotkogo analiza dannykh, Nechetkiye Sistemy i Myagkiye Vychisleniya, V.9, N1, 2014, pp. 39-86. (Time series modeling based on fuzzy data analysis, Fuzzy Systems and Soft Computing)
20. Song Q., Chissom B.S. Forecasting enrollments with fuzzy time series – part I. Fuzzy Sets and Systems, V.54, 1993, pp. 269-277.
21. Song Q., Chissom B.S. Forecasting enrollments with fuzzy time series – part II, Fuzzy Sets and Systems, V.62, 1994, pp. 1-8.
22. Uslu V.R., Bas E., Yolcu U. and Egrioglu E. A fuzzy time series approach based on weights determined by the number of recurrences of fuzzy relations, Swarm and Evolutionary Computation, V.15, 2014, pp. 19-26.
23. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Information Sciences, V.8, N3, 1975, pp. 199-249.

## ABOUT ONE APPROACH TO PREDICTION OF FUZZY TIME SERIES ON THE EXAMPLE OF THE DYNAMICS OF CHANGE IN THE DOW- JONES INDEX

### - PART I

R.R. Rzayev<sup>1</sup>, P.E. Alizada<sup>2</sup>, T.P. Mehdiyev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku,  
Azerbaijan

<sup>2</sup>Baku State University, Baku, Azerbaijan

e-mail: [raminrza@yahoo.com](mailto:raminrza@yahoo.com), [palizade@inbox.ru](mailto:palizade@inbox.ru), [tahir.mehdiyev@gmail.com](mailto:tahir.mehdiyev@gmail.com)

**Abstract.** An approach to the fuzzification of historical data as the results of observations based on "soft measurements" of the states of a dynamical system over a certain period of time is considered. As an example, the Dow-Jones industrial average index was chosen, the readings of which were established based on the results of daily trading on the US stock exchange, in the period from 06/15/2018 to 10/10/2019.

**Keywords.** Dow-Jones index, fuzzy time series, fuzzy set, membership function, predictive model.

**AMS Subject Classification:** 94D05, 93C42.

### References

1. Aliev F.A., Niftiyev A.A. , Zeynalov C.I. Optimal synthesis problem for the fuzzy systems, Optimal Control Applications and Methods, 2010, 8 p.

2. Aliev F.A., Niftiyev A.A. Zeynalov J.I. Optimal synthesis problem for the fuzzy systems in semi-infinite interval, *Appl. Comput. Math* 2011,V.10, N 1, pp. 97-105.
3. Aliev F.A., Shafizadeh E.R., Aliev R.M., Hajiev N.O., Galandarova U.M., Fuzzy model and algorithm for solving of e-shop income maximization, *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics* , 2011, V.10, N 1, pp. 39-46.
4. Chen S.M. and Chung N.Y. Forecasting enrollments of students by using fuzzy time series and genetic algorithms, *International Journal of Information and Management Sciences*, V.17, N3, 2006, pp. 1-17.
5. Chen S.M. and Chung N.Y. Forecasting enrollments using high order fuzzy time series and genetic algorithms, *International Journal of Information and Management Sciences*, V21, 2006, pp. 485-501.
6. Chen S.M. and Hwang J.R. Temperature prediction using fuzzy time series, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, V.30, N2, 2000, pp. 263-275.
7. Chen S.M. and Kao P.Y. TAIEX forecasting based on fuzzy time series, particle swarm optimization techniques and support vector machines, *Information Sciences*, V.247, 2013, pp. 62-71.
8. Chen S.M. and Wang N.Y. Fuzzy forecasting based on fuzzy-trend logical relationship groups, *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, V.40, N5, 2010, pp. 1343-1358.
9. Chen S.M. Forecasting enrollments based on fuzzy time series, *Fuzzy Sets and Systems*, V. 81, 1996, pp. 311-319.
10. Chen S.M. Forecasting enrollments based on high-order fuzzy time series, *Cybernetics and Systems*, V.33, N1, 2002, pp. 1-16.
11. Cheng C.H., Chang J.R., Yen C.A. Entropy-based and trapezoid fuzzification fuzzy time series approaches for forecasting IT project cost, *Technological Forecasting & Social Change*, V.73, 2006, pp. 524-542.
12. Dow Jones Industrial Index, <https://www.ru.tradingview.com/symbols/DJ-DJI/>, last accessed 2022/11/15.
13. Huang Y.L., Horng S.J., He M., Fan P., Kao T.W., Khan M.K. and Kuo I.H. A hybrid forecasting model for enrollments based on aggregated fuzzy time series and particle swarm optimization, *Expert Systems with Applications*, V.38, N.7, 2011, pp. 8014-8023.
14. Huarng K. Heuristic models of fuzzy time series for forecasting, *Fuzzy sets and systems*, V.123, N3, 2001, pp. 369-386.
15. Kumar N. et al.: Fuzzy time series forecasting of wheat production. *International Journal on Computer Science and Engineering*, V.2, N3, 2010, pp. 635-640.
16. Mardanov M.J., Rzayev R.R., Alizada P.E. About one approach to data fuzzification on the example of the Dow Jones index time series, *Mathematical Machines and Systems*, V.1, 2021, pp. 108-115.

17. Ortiz-Arroyo D., Poulsen J.R. A weighted fuzzy time series forecasting model, *Indian Journal of Science and Technology*, V.11, N27, 2018, pp. 1–11.
18. Poulsen J.R. Fuzzy time series forecasting – developing a new forecasting model based on high order fuzzy time series. – AAUE: CIS 4, 2009. – 67 p.
19. Rzayev R.R. et al. Modelirovaniye vremennykh ryadov na osnove nehotkogo analiza dannykh, *Nechetkiye Sistemy i Myagkiye Vychisleniya*, V.9, N1, 2014, pp. 39-86. (Time series modeling based on fuzzy data analysis, *Fuzzy Systems and Soft Computing*)
20. Song Q., Chissom B.S. Forecasting enrollments with fuzzy time series – part I. *Fuzzy Sets and Systems*, V.54, 1993, pp. 269-277.
21. Song Q., Chissom B.S. Forecasting enrollments with fuzzy time series – part II, *Fuzzy Sets and Systems*, V.62, 1994, pp. 1-8.
22. Uslu V.R., Bas E., Yolcu U. and Egrioglu E. A fuzzy time series approach based on weights determined by the number of recurrences of fuzzy relations, *Swarm and Evolutionary Computation*, V.15, 2014, pp. 19-26.
23. Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, V.8, N3, 1975, pp. 199-249.